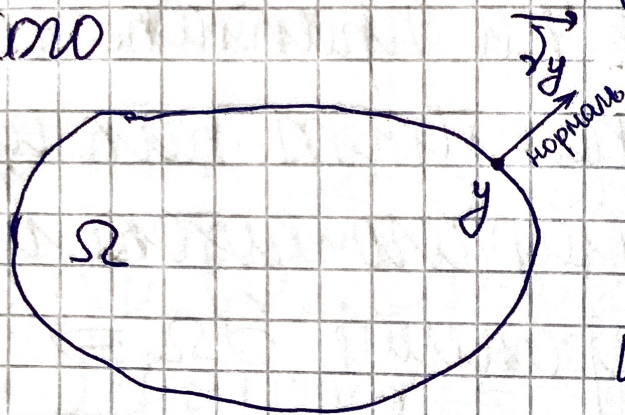


// Напоминание // ∇ Гаусса-Остроградского (задача)

кого



Ω - орг. обл-ть в $\mathbb{R}^n$
с достаточно "хоро-
шей" границей $\partial\Omega$ (напр,
 Ω - выпукл. обл-ть с гладк.

границей)

$\vec{n}_y = \vec{n}_y$ - внешн. единичн. нормаль к $\partial\Omega$,
 $|\vec{n}_y| = 1, \forall y \in \partial\Omega$.

* вектор. поле (в.п.) $\vec{A}(x) = (A_1(x), \dots, A_n(x))$ класса $C^1(\overline{\Omega})$, т.е. $A_k \in C^1(\overline{\Omega})$,
 $k = \overline{1, n}$

Тогда $\int_{\partial\Omega} (\vec{A}(y), \vec{\gamma}_y) ds_y = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A}(x) dx \quad (G0)$

где $\operatorname{div} (\vec{A}(x)) = \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial A_n(x)}{\partial x_n}$

↓ верна в размерностях $n \geq 2$

классич. вариант при $n=3$:

$\int_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$, где $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ —

— единич. внешн. нормаль к dS

Физ. комментарий: на практике величину $\int (\vec{A}(y), \vec{\gamma}_y) ds_y$ трактуют как интенсивность суммарного потока в-ря поля $\vec{A}(x)$ через границу $\partial\Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow$ условие $\operatorname{div} \vec{A}(x) = 0$ означает отсутствие источников и стоков в.п.

$\vec{A}(x)$ в обл-ти Ω .

Сл (из ф-лы (G0)) Выводу в разделе считаем, что $\Omega \in (G0)$, т.е. Ω — обл. обл-ти и g/v в.п. $\vec{A} \in C^1(\bar{\Omega})$ вып. ф-ла (G0)

и $u \in C^2(\bar{\Omega}) \Rightarrow \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \in C^1(\Omega)$

$$(\nabla u, \vec{\gamma}_y) = (\vec{\gamma}_y, \nabla u) = \frac{\partial u}{\partial \gamma_y} - \text{производ. по направ.}$$

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \equiv \Delta u. \text{ Применяя}$$

$$(GO), \text{ получаем } \downarrow \text{ Гаусса: } \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \gamma_y} dS_y = \int_{\Omega} \Delta u(x) dx, \quad \forall u \in C^2(\bar{\Omega})$$

$$\text{Вариант (Гаусса): } \uparrow u \in C^2(\bar{\Omega}), \Delta u(x) \equiv 0$$

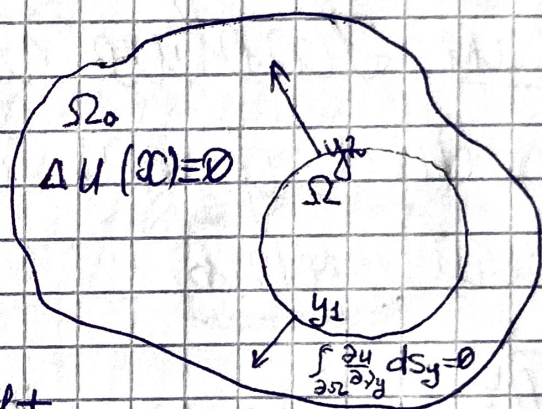
$$\text{в } \bar{\Omega} \Rightarrow \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \gamma_y} dS_y = 0$$

$$\text{II) } \forall u \in C^2(\bar{\Omega}), v \in C^1(\bar{\Omega}).$$

$$\star \operatorname{div}(v \nabla u) = \sum_{j=1}^n v \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = v \Delta u + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} = v \Delta u +$$

$$+ (\nabla u, \nabla v). \text{ Отсюда } \int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) dx \stackrel{(GO)}{=} \int_{\partial \Omega} (v \nabla u, \vec{\gamma}_y) dS_y = \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \gamma_y} dS_y -$$



$$- \text{ для ф-ла Грина, т.е. } \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \gamma_y} dS_y =$$

$$= \int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx, \quad \forall u \in C^2(\bar{\Omega}), \forall v \in C^1(\bar{\Omega})$$

$$\text{Вариант при } v \equiv u: \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial u}{\partial \gamma_y} dS_y = \int_{\Omega} u \Delta u dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx, \quad \forall u \in C^2(\bar{\Omega})$$

$$\text{III) } \uparrow u, v \in C^2(\bar{\Omega}). \text{ Запишем 2 версии}$$

1й ф-ны Грина:

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx, \quad (*)$$

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$$

2ая ф-на Грина: $\int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}) ds =$

$$= \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx, \quad \forall u, v \in C^2(\Omega) \quad // \text{симметричное выр-ние}$$

! Зам Условие гладкости ф-ции в указанных ф-лах должно дополнительно ослаблять

Применение ф-лы (30) в теории гармонических ф-ций

Опр. Ф-ция $u \in C^2(\Omega)$ наз-ся гармонической в обл-ти $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), if $\Delta u(x) = 0$ всюду в обл-ти Ω

Подробнее: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ в Ω

Важное уточнение: if Ω - неогранич. обл-ть в $\mathbb{R}^n$, то в опр. гарм. ф-ций часто добавляют требование регулярности

на ∞ -ти

1) $n=2 \Rightarrow O(1)$ при $|x| \rightarrow +\infty$ (равномерная ограниченность на ∞ -ти), т.е. $\exists M > 0$ и

$$\exists R > 0: |u(x)| \leq M \text{ при } \forall x, |x| \geq R$$

2) $n \geq 3$: $\bar{O}(1) = |u(x)|$ при $x \rightarrow +\infty$ (стремление к 0 на ∞ -ти), т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon)$:

$$|u(x)| \leq \varepsilon \text{ при } \forall x, |x| \geq R$$

// Эти требования нужны д/получения $!$ -ти соответств. краев. задач во внешн. обл-тях.

Краткая запись: $u \in \text{Reg}(\infty)$

Типичные задачи д/гарм. ф-ций — задачи Дирихле и Неймана

Задача Дирихле: $\Gamma \Omega$ — огранич. обл-ть (внутр. зад. D), $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases}$ где φ — заданная ф-ция, $u = u(x) = ?$

Стандарт. класс: $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, при этом $\varphi \in C(\partial\Omega)$

Усиленный класс: $u \in C^2(\bar{\Omega})$

Трингуловый? — ! решения

В усил. классе он реш-ся элементарно

$\Downarrow$ (I) $\downarrow u \in C^2(\bar{\Omega}), \Delta u(x) \equiv 0$ всюду в Ω
(u в $\bar{\Omega}$). $\downarrow u|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Тогда $u(x) \equiv 0$ всюду в Ω .

▲ Запишем ф-лу Грина: $\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS =$
 $= \int_{\Omega} u \Delta u dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 = 0$ всюду в Ω

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$ всюду в $\Omega, j = \overline{1, n} \Rightarrow u(x) \equiv C = \text{const}$
всюду в $\bar{\Omega}$. Но $u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0$
всюду в Ω . ■

$\Uparrow \Downarrow \Rightarrow$! реш. зад. (I) в классе $u \in C^2(\bar{\Omega})$

Задача Неймана: Ω -обр. обл-ть в $\mathbb{R}^n$ с
гладкой границей $\partial\Omega$ (внутр. зад. II).

$\int_{\Omega} \Delta u = 0$ в Ω

$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = \psi \quad (\text{II})$

, здесь ф-ция ψ задана, $u =$

$$= u(x) = ?$$

Физ. интерпретация в стационарной теплопроводности: требуется найти распределение стационар. температуры внутри тела (внутри обл-ти Ω) по заданным значениям тепл. потока на границе

Стандарт. класс: $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$
(может немного ослабняться)

Усиленный класс: $u \in C^2(\bar{\Omega})$